

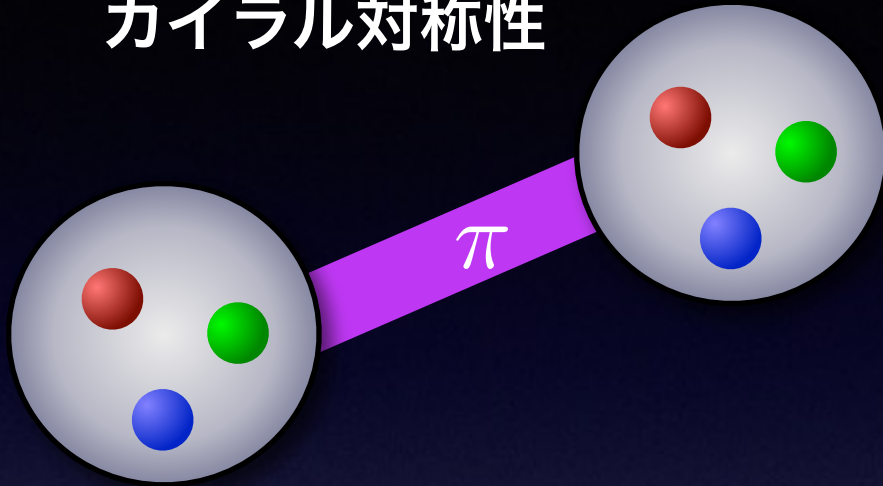
南部ゴールドストンの定理と その発展

日高 義将
理化学研究所

様々な対称性の破れ

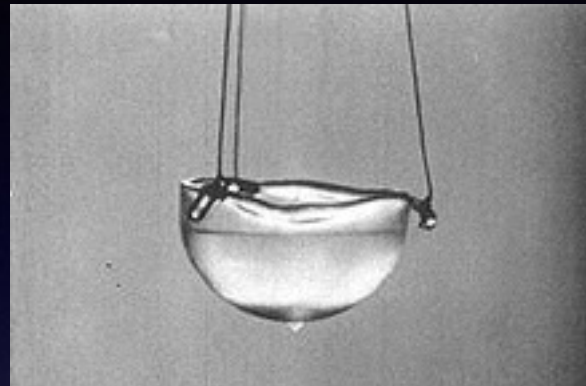
パイ中間子

カイラル対称性



超流動音波

U(1)対称性



スピン波

スピン対称性



Aney, 2006-03-12, GFDL

南部ゴールドストーンモード

光

U(1) (1form) 対称性



Lykaestria

表面波

並進対称性



Roger McLassus

拡散モード

回転対称性



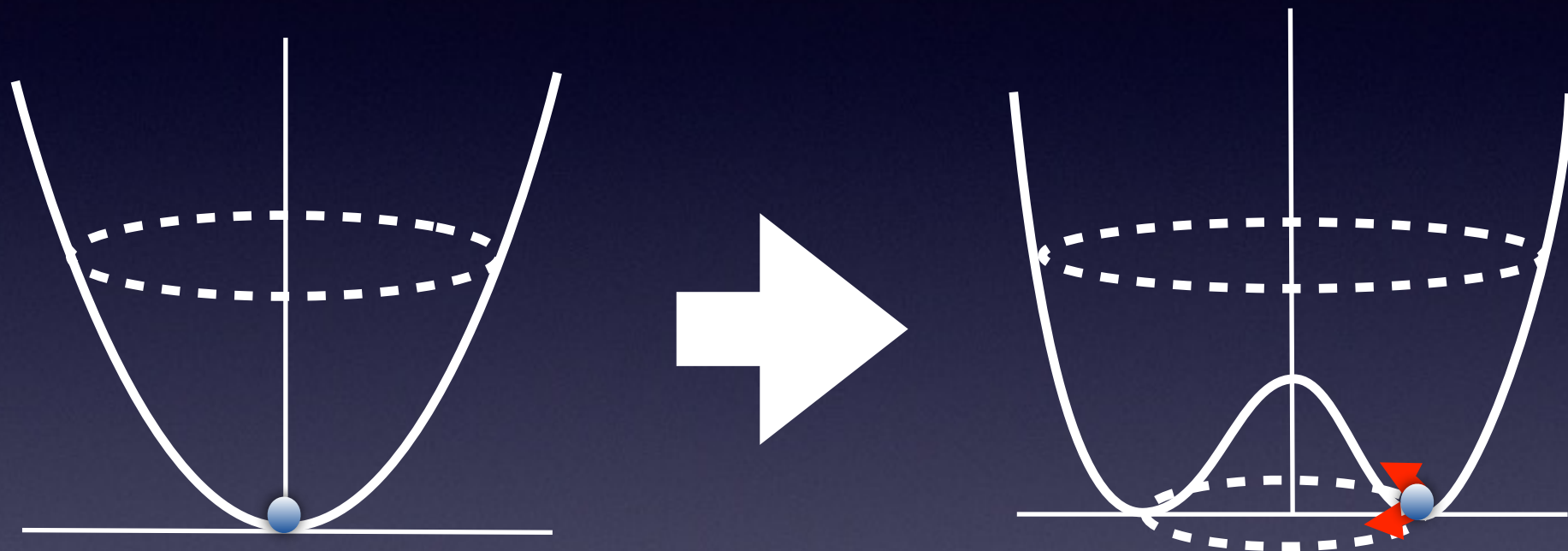
John Holmes

南部-Goldstoneの定理

Nambu('60), Goldstone(61), Nambu, Jona-Lasinio('61), Goldstone, Salam, Weinberg('62)

Lorentz対称性を持った真空

大域的対称性の自発的破れ



破れた対称性(生成子)の数 = NGモードの数

$$\text{分散関係 } \omega = c|k|$$

今日のトークのテーマ

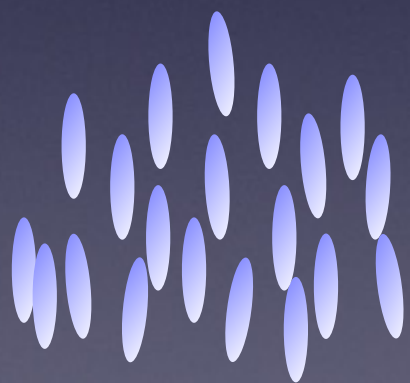
南部ゴールドストンの
定理の一般化

非相対論系

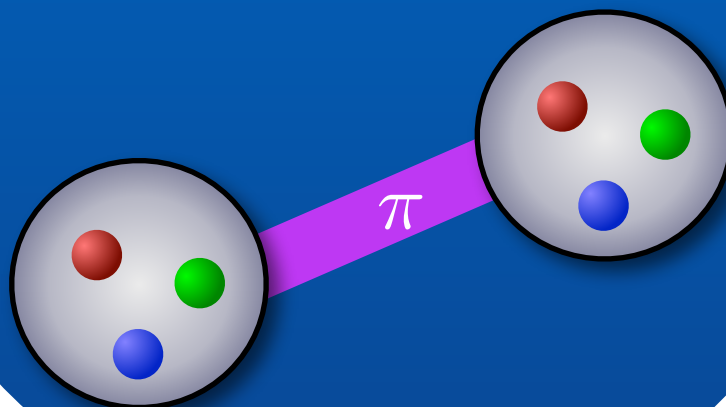


Aney, 2006-03-12, GFDL

時空対称性



南部理論



長距離力がある系



開放系



John Holmes

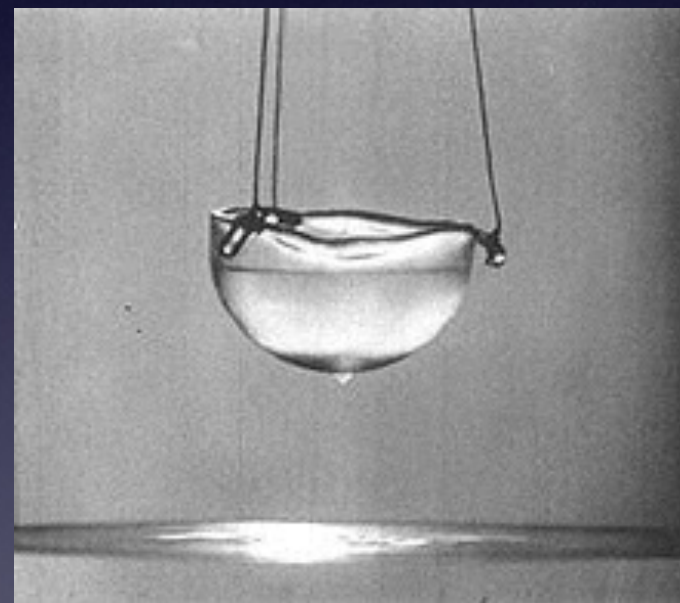
広がりを持った物体



非相対論的な系



Aney, 2006-03-12, GFDL



南部ゴールドストンの定理の“例外”

$N_{\text{BS}} \neq N_{\text{NG}}$ で $\omega \neq k$ となる NG モードの存在

—— マグノン ——



スピン回転 $SO(3) \rightarrow SO(2)$

$$N_{\text{BS}} = \dim(G/H) = 2 \quad N_{\text{NG}} = 1$$

分散: $\omega \propto k^2$

—— K 中間子凝縮したカラー超伝導相の NG モード ——

Miransky, Shovkovy ('02) Schafer, Son, Stephanov, Toublan, and Verbaarschot ('01)

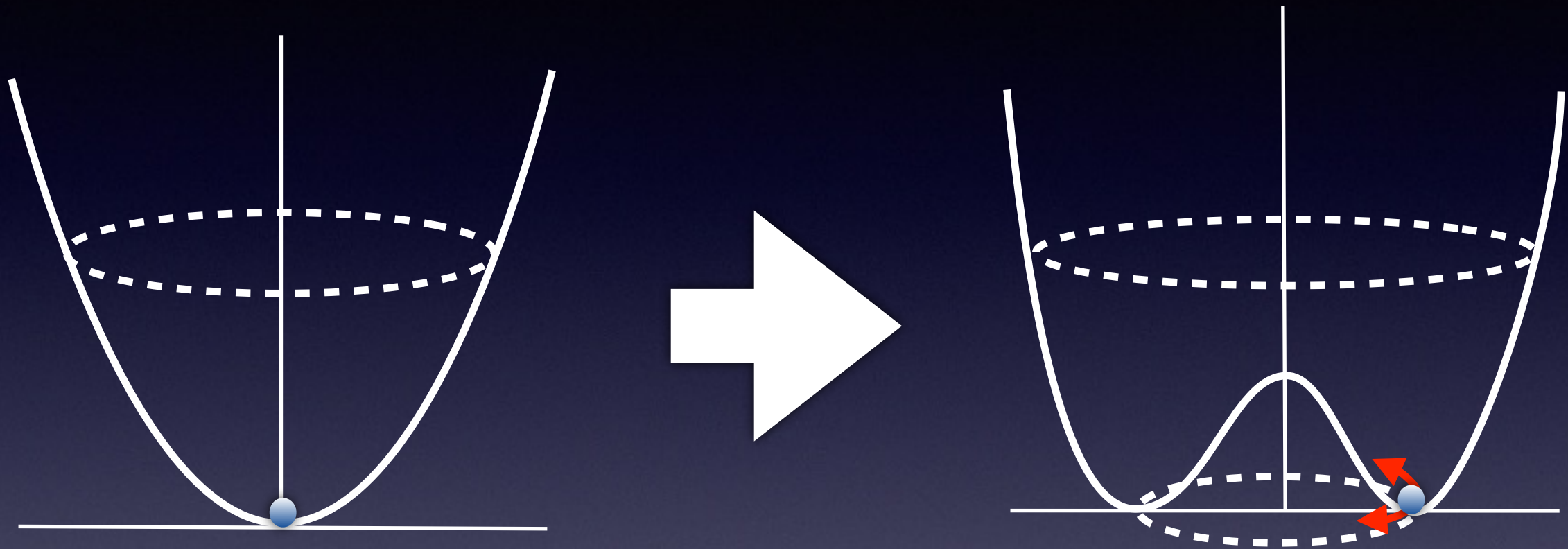
$$SU(2)_I \times U(1)_Y \rightarrow U(1)_{\text{em}}$$

$$N_{\text{BS}} = 3, \quad N_{\text{NG}} = 2$$

分散: $\omega \propto k$ と $\omega \propto k^2$

内部対称性の自発的破れ

対称性の群 $G \Rightarrow H$ に破れた時



平らな方向の数

$$N_{BS} = \dim(G/H)$$

この事実は有限温度系でも正しい
しかしNGモードの数が N_{BS} とは限らない

一般化

Nielsen - Chadha ('76)

$$N_{\text{type-I}} + 2N_{\text{type-II}} \geq N_{\text{BS}}$$

$$\text{タイプ-I: } \omega \propto k^{2n+1} \quad \text{タイプ-II: } \omega \propto k^{2n}$$

Schafer, Son, Stephanov, Toublan, and Verbaarschot

$$\langle [iQ_a, Q_b] \rangle = 0 \Rightarrow N_{\text{NG}} = N_{\text{BS}} \quad (01)$$

Nambu ('04)

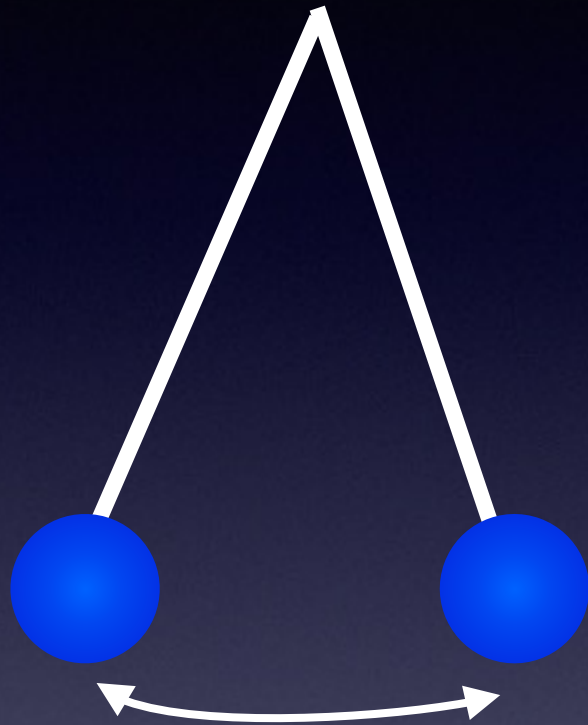
$$\langle [iQ_a, Q_b] \rangle \neq 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} Q_a, Q_b \end{pmatrix}_{\text{正準共役}}$$

Watanabe - Brauner ('11)

$$N_{\text{BS}} - N_{\text{NG}} \leq \frac{1}{2} \text{rank} \langle [iQ_a, Q_b] \rangle$$

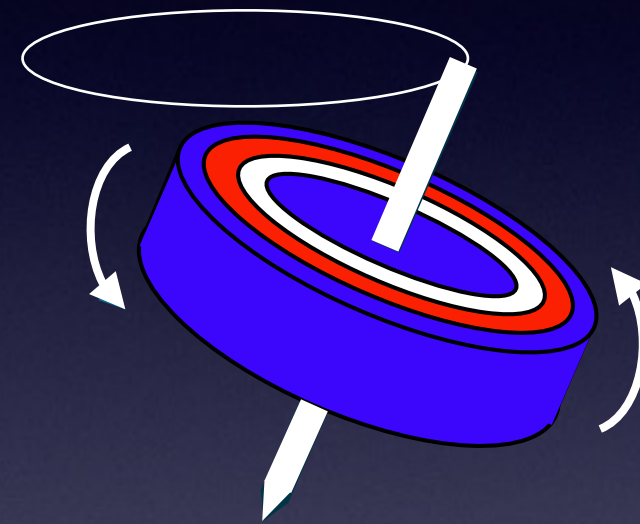
NGモードの分類

Watanabe, Murayama ('12), YH ('12)



Type-A
調和振動

例) 超流動音波



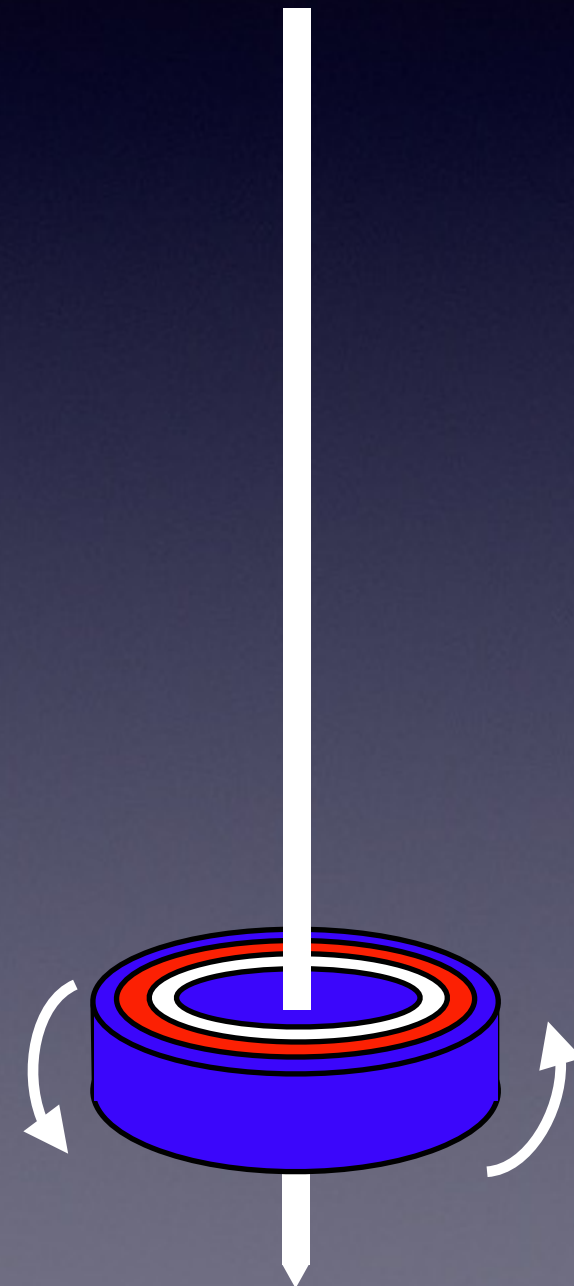
Type-B
歳差運動

例) マグノン

Type-A, Type-Bの古典模型

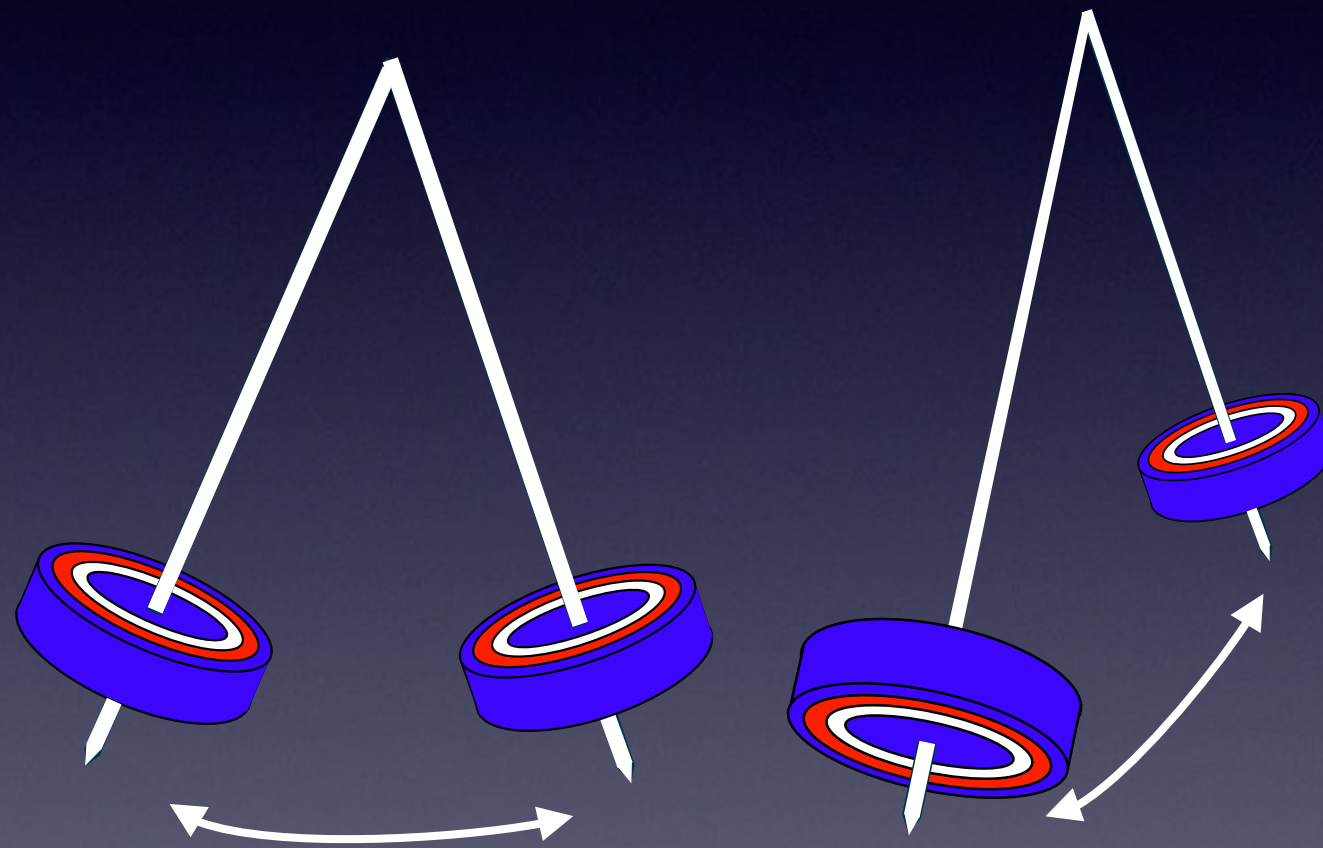
コマが付いた振り子

- 回転対称性は重力による陽な破れ
- z 軸の周りの回転は対称性がある
- x, y 軸に沿った対称性は破れている
- 破れた対称性の数は2つ



Type-A, Type-Bの古典模型

コマが回っていない時

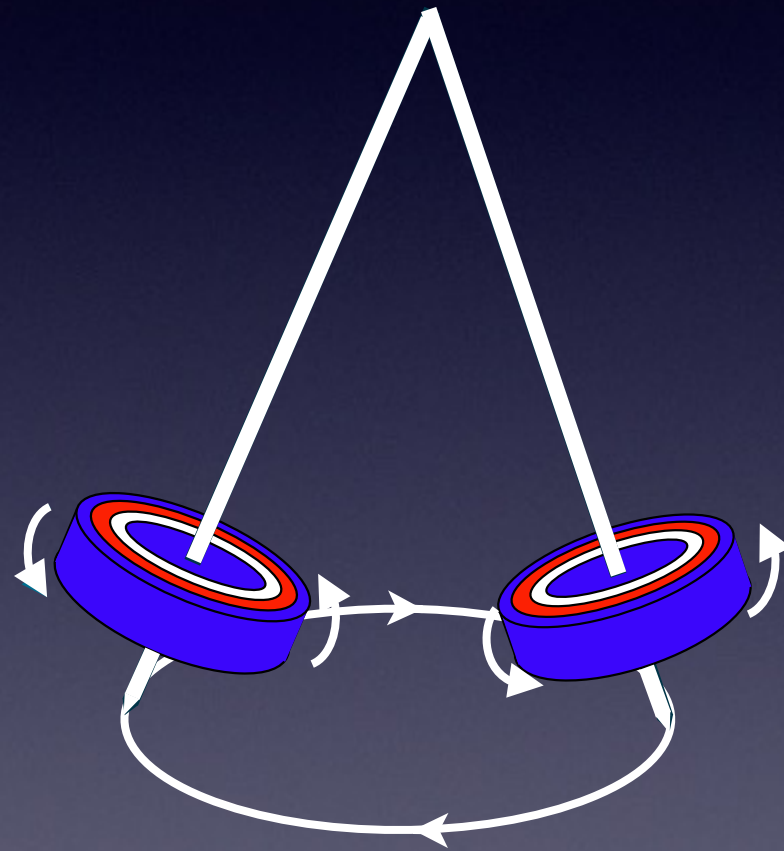


独立な2つの振り子の運動

$$\omega \sim \sqrt{g}$$

Type-A, Type-Bの古典模型

もしコマが回っていると

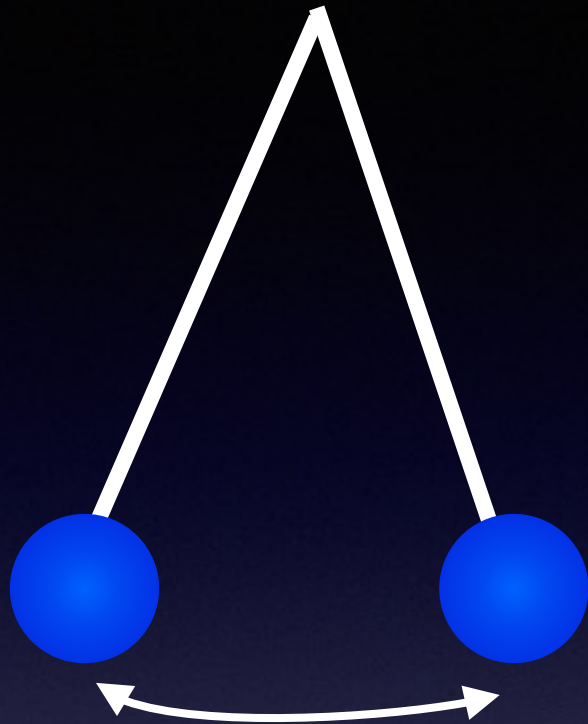


1方向の歳差運動 $\omega \sim g$

この時, $\{L_x, L_y\}_P = L_z \neq 0$

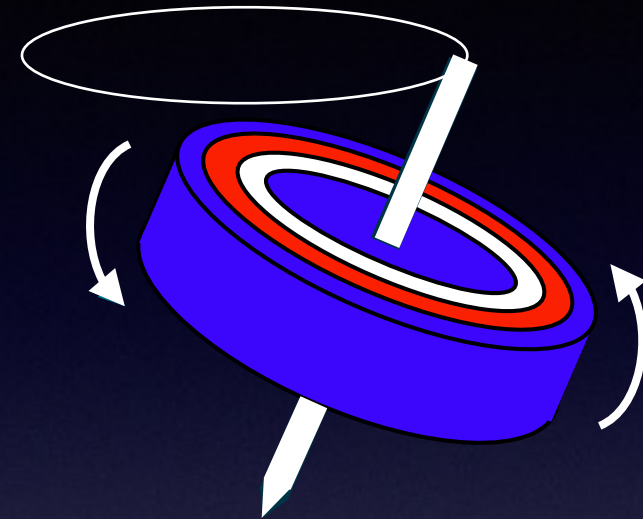
2種類の励起

Watanabe, Murayama ('12), YH ('12)



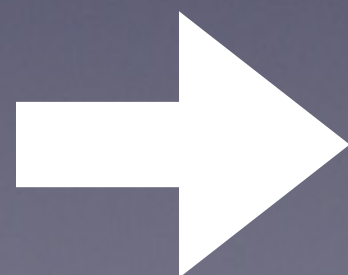
Type-A
単振動

$$N_A = N_{\text{BS}} - \text{rank}\langle [iQ_a, Q_b] \rangle$$



Type-B
歳差運動

$$N_B = \frac{1}{2} \text{rank}\langle [iQ_a, Q_b] \rangle$$

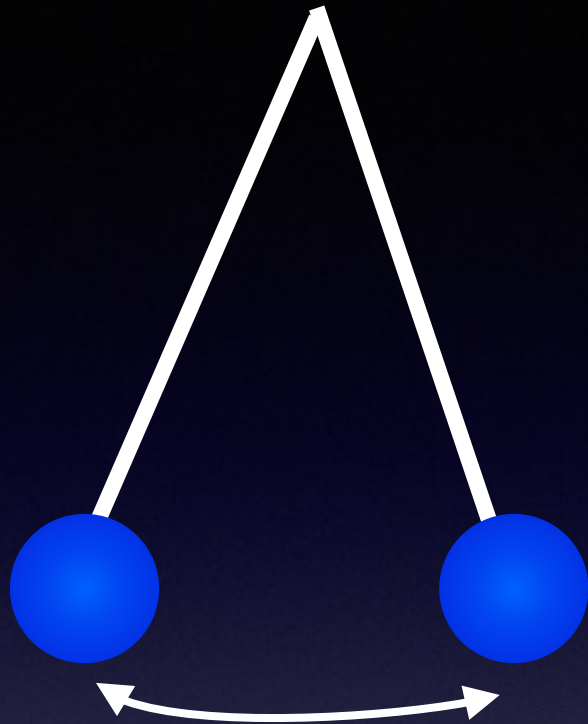


$$N_{\text{NG}} = N_{\text{BS}} - \frac{1}{2} \langle i[Q_a, Q_b] \rangle$$

2種類の励起

Watanabe, Murayama ('12), YH ('12)

重力 g



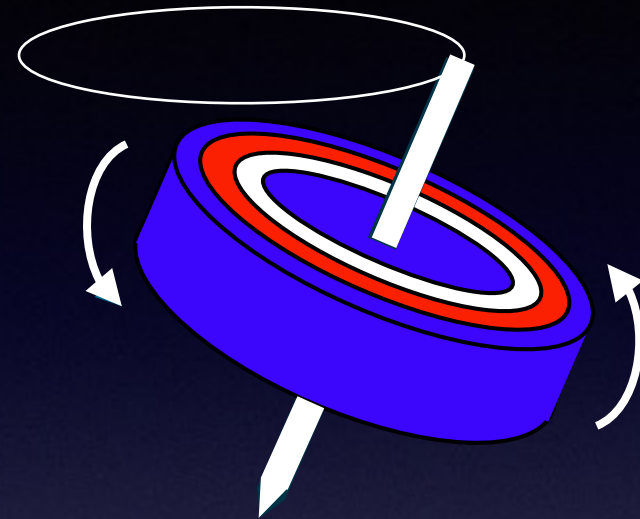
Type-A

単振動

$$\omega \sim \sqrt{g} \sim \sqrt{k^2}$$

有限温度に拡張すると,

$$\omega = ak - ibk^2$$



Type-B

歳差運動

$$\omega \sim g \sim k^2$$

$$\omega = a'k^2 - ib'k^4$$

Hayata, YH ('14)

Examples of Type-B NG modes

	N_{BS}	$N_{\text{type-A}}$	$N_{\text{type-B}}$	$\frac{1}{2}\text{rank}\langle [Q_a, Q_b] \rangle$	$N_{\text{type-A}} + 2N_{\text{type-B}}$
Spin wave in ferromagnet $\text{SO}(3) \rightarrow \text{SO}(2)$	2	0	1	1	2
NG modes in Kaon condensed CFL $\text{SU}(2) \times \text{SU}(1)_Y \rightarrow \text{U}(1)_{\text{em}}$	3	1	1	1	3
Spinor BEC $\text{SO}(3) \times \text{U}(1) \rightarrow \text{U}(1)$	3	1	1	1	3
nonrelativistic massive CP^1 model $\text{U}(1) \times \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$	2	0	1	1	2

$$N_{\text{type-A}} + 2N_{\text{type-B}} = N_{\text{BS}} \qquad N_{\text{BS}} - N_{\text{NG}} = \frac{1}{2}\text{rank}\langle [Q_a, Q_b] \rangle$$

広がりを持った物体の対称性への拡張



Generalized Global symmetries

Gaiotto et al. ('15)

これまで考えてきた物体: 点 • 0形式

広がりを持った物体の対称性

線

1-形式



面

2-形式



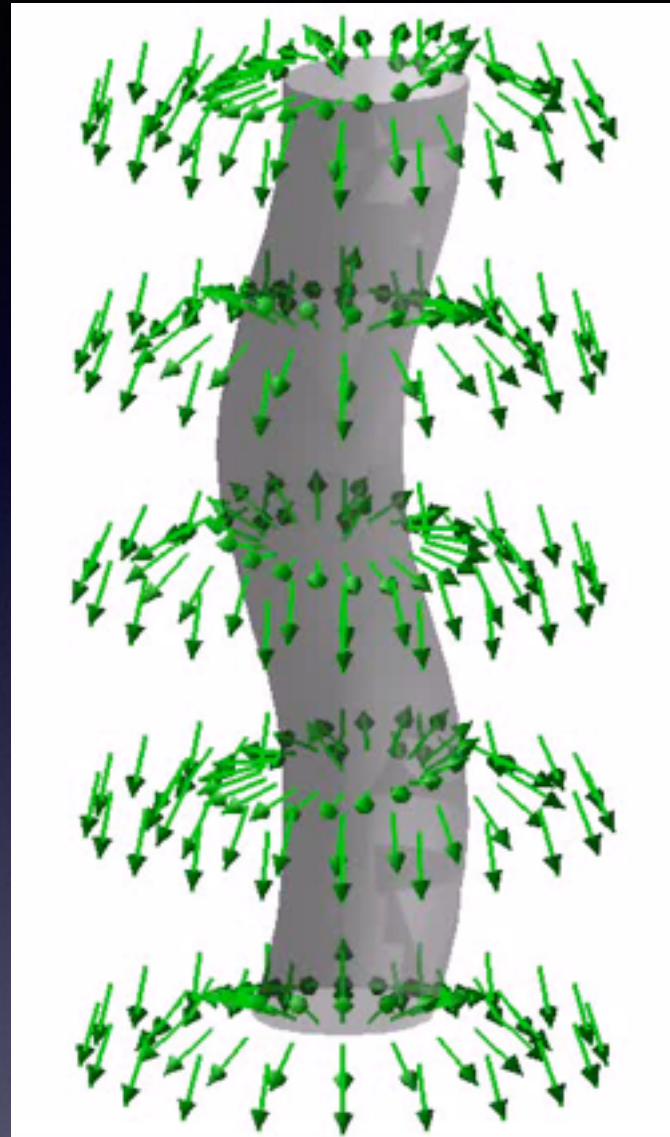
p-次元の広がりを持った物体

p-形式



トポロジカルソリトン

非相対論的 CP1 模型



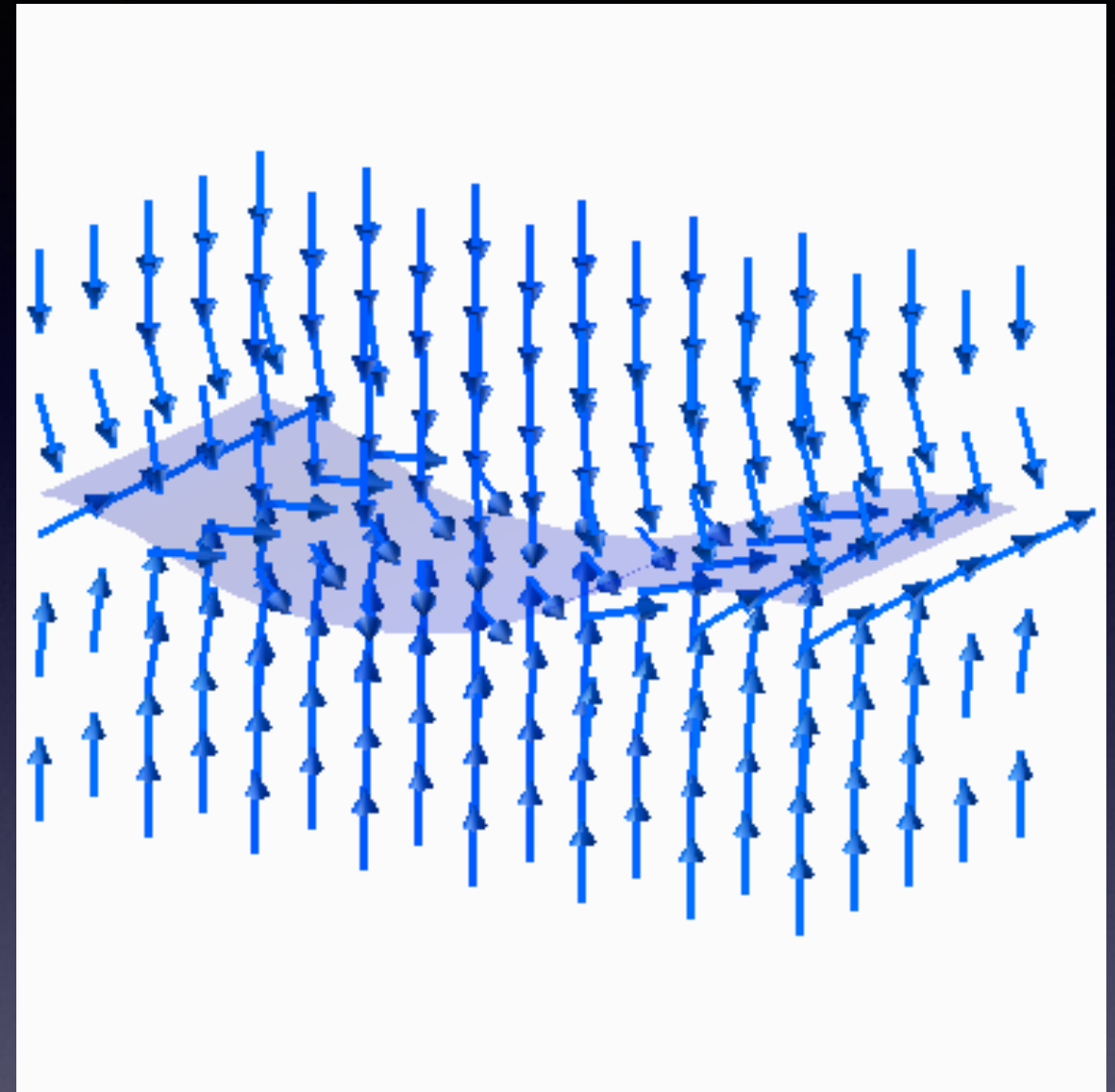
タイプ-B Kelvin

$$[P_x, P_y] \propto N$$

x 並進 y 並進 1-形式対称性

Kobayashi, Nitta, 1403.4031

c.f. Watanabe, Murayama 1401.8139



タイプ-B Ripplon-Magnon

$$[P_z, Q] \propto N$$

z 並進 U(1) 2-形式対称性

Kobayashi, Nitta, 1402.6826

NGモードとしての光子

Gaiotto et al. ('15)

cf. Ferrari, Picasso ('71), Hata ('82), Kugo, Terao, Uehara ('85)

電荷を持った物体

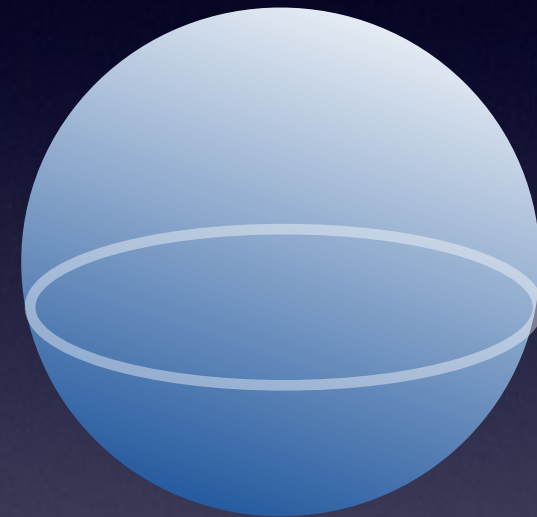


Wilson ('t Hooft) ループ

$$W = \exp \left[i \oint A_\mu dx^\mu \right]$$

$$H = \exp \left[i \oint \tilde{A}_\mu dx^\mu \right]$$

電荷



面演算子

電氣的: $Q_e = \frac{2}{e^2} \int dS^i E^i$

磁氣的: $Q_m = \frac{1}{2\pi} \int dS^i B^i$

NGモードとしての光子

ループの期待値

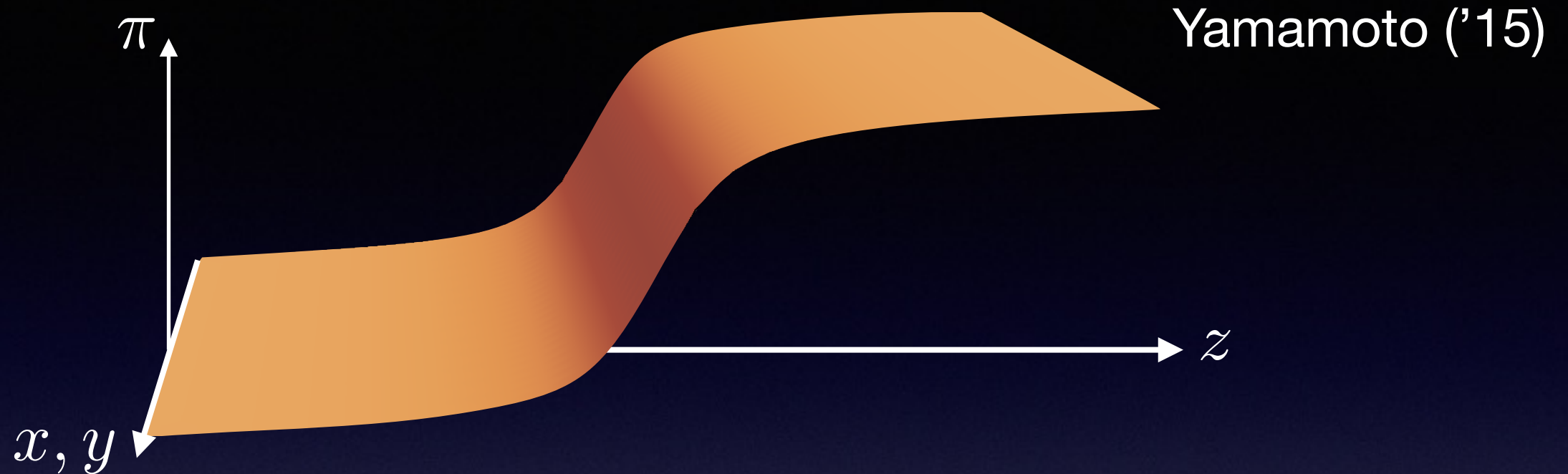
$$\langle \bigcirc \rangle \left\{ \begin{array}{ll} \text{面積則:} & \text{破れてない} \\ \text{クーロン則:} & \text{破れている} \end{array} \right.$$

光子=NGモード

6つの破れた生成子: E^i, B^i
しかしそれらは独立ではない

$$[E^i(x), B^j(y)] = \epsilon^{ijk} \partial_k \delta^{(3)}(x - y) \Rightarrow \text{2つの光子}$$
$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$$

非相対論的な光子



光子とドメインウォールと相互作用する系を考える

$$S = -\frac{1}{2e^2} \int d^4x \left(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2 \right) + C \int d^4x \pi \mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$$

もし $\partial_z \pi = \text{const}$ $\Rightarrow \omega_k \sim k^2$ 1つの光子

$$\langle [Q_e(M_{xz}), Q_e(M_{yz})] \rangle \sim \int dz \partial_z \pi \quad \text{タイプ-B}$$

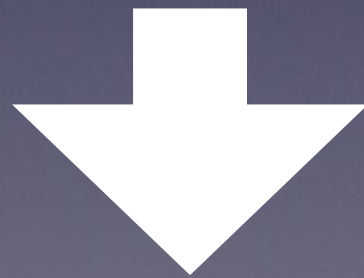
開放系



John Holmes

例)アクティブマター

個々(鳥, 魚)は内部エネルギーを使って自由に動き,
外部との摩擦もある



エネルギーや運動量は保存しない

例) アクティブ流体のNG モード

J. Toner, and Y. Tu, PRE (1998)

鳥の数保存則: $\partial \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$

$$\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \alpha \mathbf{v} - \beta \mathbf{v}^2 \mathbf{v} - \nabla P + D_L \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) + D_l (\mathbf{v} \cdot \nabla)^2 \mathbf{v} + f$$

非保存項 ノイズ



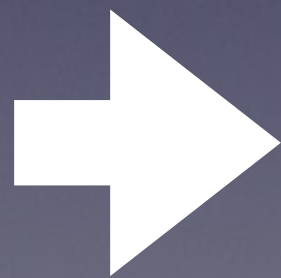
John Holmes

定常解:

$$v^2 = \alpha / \beta \equiv v_0^2$$

対称性の破れ: $O(3) \rightarrow O(2)$

ゆらぎ: $\mathbf{v} = (v_0 + \delta v_x, \delta v_y, \delta v_z)$



$$\omega = ck \quad \omega = i\Gamma k^2 \quad \text{NG モード}$$

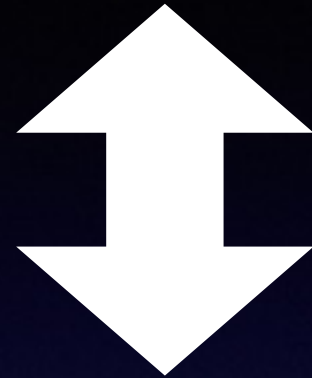
伝播モード

散逸モード

散逸系は普通の意味での作用が作れない

どのように対称性の破れを
議論すればよいか？

確率過程の方程式



経路積分

Martin-Siggia-Rose formalism

$$Z = \int \mathcal{D}\phi_A \mathcal{D}\phi_R e^{iS_{\text{MSR}}[\phi_R, \phi_A]}$$

MSR作用の対称性を考えれば良い

MSR作用の自発的対称性の破れ

Minami, YH ('15)

MSR作用の対称性の電荷: Q_A

タイプ-A モード: $\omega = -ik^2\Gamma$ 拡散モード

$\langle [iQ_A, \phi_R] \rangle \neq 0$ cf. 保存系 $\omega = ak - ibk^2$

タイプ-Bは存在するか？

“保存系だった場合”の対称性の電荷: Q_R
の破れを考えれば良い.

タイプ-B モード: $\omega = ak^2 - ik^2\Gamma'$ 伝播モード

$\langle [iQ_A, Q_R] \rangle \neq 0$ cf. 保存系 $\omega = a'k^2 - ib'k^4$

開放系NGモードの分散の予想

Minami, YH ('15)

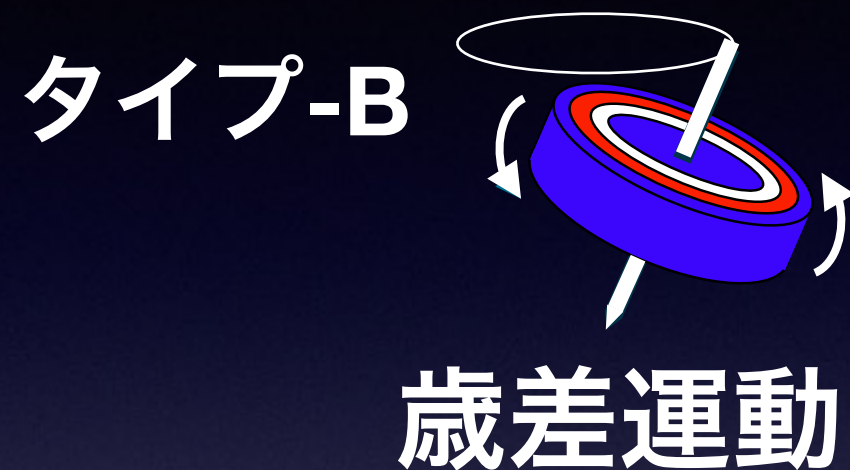
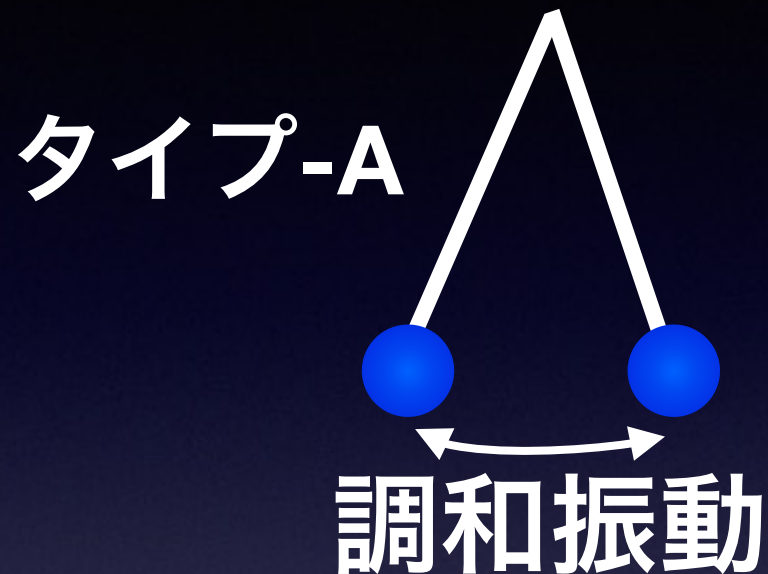
タイプ	分散		保存量	例	証明
	Re	Im			
A	k	k^2	Q_A, Q_R	超流動	完了
	0	k^2	Q_A	鳥の群れ	
B $\langle [Q_A, Q_R] \rangle \neq 0$	k^2	k^4	Q_A, Q_R	強磁性体	完了
	k^2	k^2	Q_A	?	

Q_A : S_{MSR} の対称性の電荷

Q_R : 保存系だった場合の対称性

まとめ

NGモードは2つのタイプに分類できる



$$N_A = N_{\text{BS}} - \text{rank}\langle [iQ_a, Q_b] \rangle$$

$$N_B = \frac{1}{2} \text{rank}\langle [iQ_a, Q_b] \rangle$$

このトークで話題にした系

- 非相対論系
- 広がり思った対称性のNGモード
- 開放系のNGモード